22. 多項式 Operator ニ就イテ (II)

阪大　木村直樹

(XII 18 受付)

二次斉次集合ハ或ル一次斉次集合ヲ含メバ二ツノ一次斉次集合ノ和トシテ表ハサレルコトヲ証明スル。

定理. $f(x)$, $F(x)$ ヲ夫々 二次, 一次 ノ斉次多項式トスル.

$F(x)$ ノ零点集合ガ常ニ $f(x)$ ノ零点集合ニ含マレルナラバ

$$f(x) = F(x)\cdot G(x)$$

($G(x)$ ハ一次斉次式)

ト二ツノ一次因子ノ積トシテ $f(x)$ ヲ分解スルコトガ出来ル

証. $f(x)$, $F(x)$ ノ零点集合ヲ夫々 N, M トスル. 即チ

$$N = \{x \mid f(x) = 0\} \qquad M = \{x \mid F(x) = 0\}$$

$E - M \ni y$ ヲ固定スレバ E ノ各点 z ハ

$$z = x + \alpha y, \quad x \in M, \quad \alpha \in C$$

ト表示可能, 然モ unique デアル 且

$$F(z) = \alpha F(y) \neq 0 \quad (\alpha \neq 0)$$

又 $f(z)$ ハ
$$f(z) = f(x+\alpha y) = f(x) + \alpha\, p(x,y) + \alpha^2 f(y)$$
$$= \alpha\, p(x,y) + \alpha^2 f(y)$$

コヽデ $p(x,y)$ ヲ M ノ上ノ x ノ多項式ト考ヘレバ 一次斉次デアルカラ

零点集合ヲ　$D=\{x \mid j(x,y)=0 \quad x\in M\}$

トスレバ，D ガ M ニ一致スル場合ト一次元低クナル場合ト起ル

(i)　$D=M$ ナルトキハ

$$f(z)=\alpha^2 f(y)$$

故

$$f(z)=\left(\frac{\sqrt{f(y)}}{F(y)}F(z)\right)^2$$

或ヒハ

$$=F(z)\cdot\left(\frac{f(y)}{F^2(y)}F(z)\right)$$

(ii)　$D\subsetneq M$ ナルトキハ　M ノ元 x ハ　$M-D\ni v$ ヲ fix スレバ

$$x=u+\beta v \qquad u\in D,\ \beta\in C$$

ト一意ニ表示可能ナル故

$$p(x,y)=p(u+\beta v,\ y)=\beta\, p(v,y)$$

$$f(z)=\alpha\, p(x,y)+\alpha^2 f(y).$$

$$=\alpha\left(\beta\, p(v,y)+\alpha f(y)\right)$$

依ツテ N ハ　$\{z \mid \alpha=0\}=M$　ト

$$\{z \mid \beta\, p(v,y)+\alpha f(y)\}=L$$

トノ和集合トシテ表ハサレル。

$$N=L\cup M$$

尚ハ、コノトキ　$D=L\cap M$

以上ノ定理ハ斉次性ヲ取去ツテモヨイ。又 $f(x)$ ヲ n 次トスレバ今ト同様ニ

定理．　$f(x)$ ヲ n 次　$F(x)$ ヲ一次ノ斉次式トシ $f(x)$ ノ零点集合ガ $F(x)$ ノ零点集合ヲ含メバ $(n-1)$ 次ノ斉次式 $G(x)$ ガ存在シテ

$$f(x)=F(x)\cdot G(x)$$

訂正：　′，β，α ヲ使ツテ z ヲ表ハス所ナ γx_0 ヲ $+\gamma y_0$ ト訂正シマス